Reglas de las sumatorias

En la operación de adición o suma, se presenta con frecuencia en la estadística el símbolo $\sum$ (sigma) para denotar "tomar la suma de". A continuación se presenta un ejemplo donde se tiene un conjunto de valores ***n*** para alguna variable ***X***.

$\sum_{i=1}^{n} X_i$, esta expresión indica que estos n valores deben sumarse.

Por consiguiente: $\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$

Ejemplo:
Se encuentran cinco observaciones para la variable $X: \; X_1 = 2, \; X_2 = 0, \; X_3 = -1, \; X_4 = 5 \; y \; X_5 = 7$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 2 + 0 + (-1) + 5 + 7 = 13$$

En estadística nos vemos involucrados muy a menudo con la suma de los valores al cuadrado de una variable.

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \ldots + X_n^2$$

Y en nuestro ejemplo, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2$$

$$= 2^2 + 0^2 + (-1)^2 + 5^2 + 7^2$$

$$= 4 + 0 + 1 + 25 + 49$$

$$= 79$$

Se debe observar, aquí que $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ la sumatoria de los cuadrados no es igual a $\left(\sum_{i=1}^{n} X_I\right)^2$, el cuadrado de la suma, esto es $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$

En nuestro ejemplo, la sumatoria de los cuadrados es igual a 79. Esto no es igual al cuadrado de la suma, cuyo resultado es $13^2 = 169$
Otra operación que se utiliza con frecuencia implica la sumatoria del producto.
Esto es, suponiendo que tenemos dos variables, **X** y **Y**, cada una con ***n*** observaciones.

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3 + \ldots + X_nY_n$$

Continuando con el ejemplo anterior, suponiendo que también se tiene una segunda variable **Y** cuyos valores son $Y_1 = 1,\ Y_2 = 3,\ Y_3 = -2,\ Y_4 = 4\ \ y\ \ Y_5 = 3$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{5} X_i Y_i = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3 + X_4Y_4 + X_5Y_5$$
$$= (2)(1) + (0)(3) + (-1)(-2) + (5)(4) + (7)(3)$$
$$= 2 + 0 + 2 + 20 + 21$$
$$= 45$$

Al calcular $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ debemos tomar en cuenta que el primer valor de **X** por el de **Y**, y así sucesivamente.

Estos productos cruzados luego se suman con el propósito de obtener el resultado deseado. Sin embargo, debemos observar en este punto que la sumatoria de productos cruzados no es igual al producto de las sumas individuales, es decir;

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \neq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

En nuestro ejemplo, $\sum_{i=1}^{5} X_i = 13 \;\; y \;\; \sum_{i=1}^{5} Y_i = 1+3+(-2)+4+3=9$ de modo que

$$\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{5} Y_i\right) = (13)(9) = 117$$

Esto no es lo mismo que $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$, que es igual a 45.

Antes de estudiar las cuatro reglas básicas para efectuar operaciones con notación sigma, será de ayuda presentar los valores de cada una de las cinco observaciones de X y de Y en forma de tabla:

Observación	X_i	Y_i
1	2	1
2	0	3
3	-1	-2
4	5	4
5	7	3
	$\sum_{i=1}^{5} X_i = 13$	$\sum_{i=1}^{5} Y_i = 9$

Regla 1: La sumatoria de los valores de dos variables es igual a la suma de los valores de cada variable sumada.

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

En nuestro ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{5}(X_i + Y_i) = (2+1)+(0+3)+(-1+(-2))+(5+4)+(7+3)$$
$$= 3+3+(-3)+9+10 = 22$$
$$\sum_{i=1}^{5} X_i + \sum_{i=1}^{5} Y_i = 13+9 = 22$$

Regla 2: La sumatoria de una diferencia entre los valores de dos variables es igual a la diferencia entre los valores sumados de las variables.

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Por consiguiente, en nuestro ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5}(X_i - Y_i) = (2-1) + (0-3) + (-1-(-2)) + (5-4) + (7-3)$$
$$= 1 + (-3) + 1 + 1 + 4$$
$$= 4 = \sum_{i=1}^{5} X_i - \sum_{i=1}^{5} Y_i = 13 - 9 = 4$$

Regla 3: La sumatoria de una constante por una variable es igual a la constante que multiplica a la sumatoria de los valores de la variable.

$$\sum_{i=1}^{n} cX_i = c\sum_{i=1}^{n} X_i$$

En la que c es una constante.
Por tanto, en nuestro ejemplo, c =2

$$\sum_{i=1}^{5} cX_i = \sum_{i=1}^{5} 2X_i = (2)(2) + (2)(0) + (2)(-1) + (2)(5) + (2)(7)$$
$$= 4 + 0 + (-2) + 10 + 14 = 26$$
$$2\sum_{i=1}^{5} X_i = (2)(13) = 26$$

Regla 4: Una constante sumada ***n*** veces será igual a ***n*** veces al valor de la constante.

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

En la que c es una constante. Así pues, si la constante c =2 se suma cinco veces tendremos:

$$\sum_{i=1}^{5} c = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$
$$= (5)(2) = 10$$

En el caso de que $i \neq 1$ entonces n = (valor final - valor inicial)+ 1

$$\sum_{i=2}^{7} c = 2+2+2+2+2+2 = 12$$
$$= ((7-2)+1) * (2) = 12$$

Para ilustrar cómo se utilizan las reglas de la sumatoria, podemos mostrar una de las propiedades matemáticas pertenecientes al promedio o media aritmética .

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = 0$$

Esta propiedad establece que la sumatoria de las diferencias entre cada observación y la media aritmética es cero. Esto se puede probar matemáticamente de la siguiente manera:

1.- De la ecuación (4.1),

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Así pues, utilizando la regla 2 de la sumatoria, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{X}$$

2.- Puesto que, para cualquier conjunto fijo de datos, $\overline{X}$ puede ser considerada como una constante, de la regla 4 de la sumatoria tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{X} = n\overline{X}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i - n\overline{X}$$

3.- Sin embargo, de la ecuación (4.1), puesto que

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{después } \boldsymbol{n}\, \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i$$

De esta manera se ha demostrado que:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0$$